Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérences. Exemples et applications.

RM

2022-2023

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique.

1 Convergence des suites numériques

1.1 Limite d'une suite

Définition 1 : Soient (u_n) une suite numérique et $l \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) admet l pour limite si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N (dépendant de ε) tel que : $n \geq N$ implique $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Exemple 2 : La suite $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$ a pour limite 1.

Théorème (Unicité de la limite) 3 : Si une suite numérique (u_n) admet une limite, alors elle n'en n'admet pas d'autre.

Définition 4 : On dit qu'une suite numérique (u_n) est convergente si elle admet une limite. Dans le cas contraire, on dit que la suite est divergente.

Proposition 5 : Toute suite numérique convergente est bornée.

Remarque 6 : La réciproque est fausse. La suite $u_n = (-1)^n$ est bornée mais non convergente. On verra par contre plus tard une propriété très pratique si u_n est bornée.

Proposition 7 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et (v_n) est bornée. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$.

Exemple 8 : La suite $(\sin n)_{n\geq 0}$ est bornée et la suite $(1/n)_{n\geq 1}$ tends vers 0. Donc la suite $(\frac{\sin n}{n})_{n\geq 1}$ tends vers 0.

Proposition 9 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques convergeant vers l et l' dans $\mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l + l', \quad \lim_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda l, \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = ll', \quad \lim_{n\to+\infty}|u_n| = |l|.$$

Si de plus $l' \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, on a $v_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/v_n = 1/l'$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n/v_n = l/l'$.

Remarque 10 : La réciproque de $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = |l|$ alors (u_n) converge est fausse. La suite $u_n = (-1)^n$ vérifie cela sans que u_n soit convergente.

Définition 11 : On dit que (u_n) une suite numérique réelle tends vers $+\infty$ ($-\infty$) si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique que $u_n \geq A$ ($u_n \leq A$).

Exemple 12 : La suite $u_n = (-1)^n + n$ tends vers $+\infty$ et la suite $v_n = \cos n - n$ tends vers $-\infty$.

1.2 Comparaison de suites et convergence

Théorème (d'encadrement) 13 : Soient (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, on ait $a_n \leq u_n \leq b_n$. Si (a_n) et (b_n) sont convergentes et de même limite l, alors (u_n) est convergente et sa limite est égale à l.

Proposition 14 : Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles et soient $l, l' \in \mathbb{R}$. On pose $z_n = x_n + iy_n$ pour tout n. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l + il'$ si et seulement si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l' \end{cases}$.

Remarque 15 : Cette proposition permet de ramener l'étude d'une suite complexe à celles de deux suites réelles.

Définition 16 : Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombre réels est dite croissante (décroissante) si, pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$ ($u_n \geq u_{n+1}$). On dit que (u_n) est monotone si elle est croissante ou si elle est décroissante.

Théorème 17 : Soit (u_n) une suite de nombre réels.

1) Si u_n est croissante et majorée, alors elle a une limite finie.
2) Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle admet une limite finie.

Définition 18 : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :

i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 19 : Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont même limite. De plus, en notant l cette limite commune, on a : $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout n.

Exemple 20 : Les suites de termes générales $u_n = 1 - 1/n$ et $v_n = 1 + 1/n^2$ sont adjacentes.

Définition 21 : • On dit que (u_n) est dominée par une suite réelle positive (α_n), noté $u_n = O(\alpha_n)$, s'il existe une constante $A > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n| \leq A\alpha_n$.

• On dit que (u_n) est négligeable devant une suite réelle positive (α_n), noté $u_n = o(\alpha_n)$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n| \leq \varepsilon$.

• On dit que (u_n) est équivalent à une suite numérique (v_n), noté $u_n \sim v_n$, si la suite $(u_n - v_n)$ est négligeable devant $(|u_n|)$.

Proposition 22 : • Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $v_n \neq 0$. Alors

• La suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n/v_n = 0$.

• (u_n) et (v_n) sont équivalentes si et seulement si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1$.

Exemple 23 : On a la formule de Stirling qui nous dit que $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$.

Proposition 24 : Si (u_n) et (v_n) sont équivalent et si (u_n) converge vers l, alors (v_n) converge aussi vers l.

1.3 Convergence en moyenne de Césaro

Définition 25 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique. On appelle suite des moyennes de Césaro la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.
On dit alors que (u_n) converge en moyenne de Césaro si (v_n) converge.

Exemple 26 : La suite $u_n = (-1)^n$ est convergente en moyenne de Césaro vers 0.

Théorème 27 : Si la suite (u_n) est convergente vers une limite l, alors la la suite des moyennes de Césaro converge aussi vers l.

Remarque 28 : La réciproque est fausse. La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente mais $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ est elle convergente vers 0.

Théorème 29 : Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, ..., z_n\}$. On définit alors par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k\geq 0}$, avec $P_0 = P$, et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre g de P avec $g = \dfrac{z_1 + ... + z_n}{n}$.

2 Valeurs d'adhérences d'une suite numérique

2.1 Suite extraite

Définition 30 : On appelle sous-suite ou suite extraite de la suite (u_n), tout suite $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, appelé extractrice.

Proposition 31 : Si une suite numérique (u_n) converge vers l, alors toute suite extraite de (u_n) est convergente et admet pour limite l.

Définition 32 : On appelle valeur d'adhérence d'une suite numérique (u_n), tout élément de $\mathbb{K}$ limite d'une suite extraite convergente de (u_n).

Proposition 33 : Toute suite numérique convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérences.

Remarque 34 : On utilise souvent la contraposée de cette proposition : une suite qui possède au moins 2 valeurs d'adhérences est divergente.

Remarque 35 : Une suite possédant une valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente. Par exemple avec $u_n = (1 - (-1)^n)n$ qui ne possède que 0 comme valeur d'adhérence.

Théorème 36 : Soient (X, d) un espace compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (x_n) est un connexe de X.

Application 37 : Soient $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ une fonction continue et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ et $x_0 \in [0, 1]$ et qui vérifie de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Alors la suite (x_n) converge.

Dev 1

2.2 Suites de Cauchy et théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 38 : On dit qu'une suite numérique (u_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

Proposition 39 : 1) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.
3) Toute suite de Cauchy est bornée.

Lemme 40 : Soit (u_n) une suite de Cauchy. Alors si (u_n) admet une valeur d'adhérence l, alors elle converge vers l.

Théorème 41 : Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Remarque 42 : Ceci est due au fait que $\mathbb{R}$ est $\mathbb{C}$ sont complets.

Théorème (des segments emboîtés) 43 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \\ (b_n - a_n) \to 0 \end{cases}.$$

Alors il existe un nombre réel l unique tel que $\bigcap_{n\geq 0}[a_n, b_n] = \{l\}$.

Théorème (Bolzano-Weierstrass) 44 : Toute suite numérique bornée possède au moins une sous-suite convergente.

2.3 Limite supérieure et inférieure

Définition 45 : Soit (u_n) une suite réelle. On appelle limite supérieure de (u_n) la valeur $L \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k$ et limite inférieure de (u_n) la valeur $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k$. On note $L = \overline{\lim} u_n$ et $l = \underline{\lim} u_n$.

Proposition 46 : L est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n) et l sa plus petite valeur d'adhérence.

Proposition 47 : (u_n) converge vers $u \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $l = L = u$.

3 Applications des suites numériques

3.1 Suite récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle définie par $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(I) \subset I$.

Théorème (critère séquentiel de la continuité) 48 : Soient $I =]a, b[$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue au point l si et seulement si quelque soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers l, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(l)$.

Corollaire 49 : Si la suite (u_n) d'éléments de I converge vers $l \in I$, alors nécessairement $l = f(l)$, donc l est un point fixe de f.

Exemple 50 : Pour la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$, on a $f(x) = x^2 - x - 3$. Comme f est continue, la limite éventuelle de (u_n) vérifie $l = l^2 - l - 3$, ie $l = -1$ ou $l = 3$.

Proposition 51 : *i*) Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone, dépendant du signe de $u_1 - u_0$.

ii) Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés.

Exemple 52 : On considère $u_0 \in I = [-\pi/2, \pi/2]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. On trouve déjà que le seul point fixe de sin sur I est 0, donc si (u_n) converge, c'est vers 0. Ensuite, comme la fonction sin est croissante sur I, on a que (u_n) décroit si $u_1 \leq u_0$ (donc si $u_0 \in [0, \pi/2]$) et croit si $u_1 \geq u_0$ (donc si $[-\pi/2, 0]$). Comme (u_n) est bornée, on en déduit que (u_n) converge vers 0 pour tout u_0.

Théorème (de picard) 53 : Soit $f : X \to X$ une application k-contractante où X un espace métrique complet. Alors

- f possède un unique point fixe a.
- Pour tout $x_0 \in X$, (x_n) définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a. De plus, on a $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

3.2 Approximation de points particulier

Proposition (Méthode de Newton) 54 : Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, ne s'annulant qu'une fois sur $[c, d]$. On pose alors la suite récurrente suivante : $x_0 \in [c, d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors en notant a l'unique zéro de f, on a :

- Il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, alors la suite (x_n) converge de manière quadratique vers a : il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$.

Exemple 55 : On fixe $y > 0$ et on prends $f(x) = x^2 - y$. Alors la méthode de Newton nous permet d'approcher $\sqrt{y}$.

Développement 56 : Pour tout n entier tel que $n \geq 2$, on note u_n l'aire d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle de centre O de coordonnées $(0, 0)$ et de rayon 1 dans le repère euclidien usuel. Alors la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge linéairement vers π et nous donne une méthode d'approximation de π.

Dev 2

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Suites et séries ... El Amrani
3. Calcul diff Rouvière
4. Topologie Queffelec
5. isenmann (rip)